Univerzitet Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet
Računarske nauke

Treći domaći zadatak iz predmeta
Algebra

1. Neka je $\mathbb{F}_4$ skup svih 2×2 matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix},$$

gdje su $a, b \in \mathbb{Z}_2$. Dokazati da je $\mathbb{F}_4$ polje u odnosu na sabiranje i množenje matrica po modulu 2.

2. Neka je $(R, +, \cdot)$ prsten sa jedinicom 1 i $a \in R$. Pretpostavimo da postoji jedinstveno $b \in R$, tako da je $ba = 1$. Dokazati da je b inverzni element za a.
Posmatrati element $ab - 1 + b$.

3. Neka je R Abelova grupa. U R je definisano trivijalno množenje: $(\forall x, y \in R)\ x \cdot y = 0$. Odrediti ideale u prstenu $(R, +, \cdot)$.

4.
a) Pokazati da je $\mathbb{Z}_5[x]/I$ polje, gdje je $I = \langle \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{4} \rangle$, zatim odrediti multiplikativni inverz za $\bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} + I$.
b) Neka je R komutativan prsten i $f(x) \in R[x]$. Dokazati da ako $(x-a)|f(x)$ i $(x-a)|f'(x)$, tada $(x-a)^2|f(x)$.